Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 24, núm. 1, 2009. Pàg. 13–22. DOI: 10.2436/20.2002.01.19

Gromov i la geometria: un aperitiu*

Ignasi Mundet i Riera

Resum Aquest text dóna unes breus pinzellades sobre les contribucions més cabdals de Mikhail L. Gromov, premi Abel 2009, a la geometria.

Paraules clau: Gromov, desigualtats sistòliques, raó de creixement de grups, geometria simplèctica.

Classificació MSC2010: 01A70, 51-02.

1 Quatre dades biogràfiques

Mikhail Leonídovitx Gromov, inqüestionablement un dels geòmetres més genials dels darrers cinquanta anys, va néixer el 23 de desembre de 1943 a Boksitogorsk, a uns 300 km de Sant Petersburg. Va ser estudiant de doctorat de Vladimir Rokhlin a la Universitat de Sant Petersburg entre els anys 1969 i 1973. Des de 1982 és professor permanent a l'IHES (França).

Fou conferenciant convidat a quatre edicions de l'ICM: Niça (1970), Hèlsinki (1978), Varsòvia (1982) i Berkeley (1986). Ha rebut un gran nombre de premis, entre els quals el premi Nemmers de Matemàtiques (2004), el premi Kyoto de Ciències Matemàtiques (2002), el premi Balzan de Matemàtiques (1999) i el premi Leroy P. Steele (1997). Recentment li ha estat concedit el premi Abel 2009.

Aquest article és una versió editada de les notes d'una conferència que va impartir l'autor al Col·loqui de la Facultat de Matemàtiques de la UB, el 20 de maig de 2009, en ocasió de la concessió del premi Abel a Gromov. És obvi que no tenim la més mínima pretensió de fer un repàs dels resultats (ni tan sols dels més rellevants) de Gromov. Ens hem limitat a fer una tria de tres temes en els quals Gromov ha fet contribucions transcendents: geometria sistòlica, grups de creixement polinomial i geometria simplèctica, i dins d'aquests temes

* Aquest text és una versió editada de les notes d'un col·loqui impartit per l'autor a la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona el 20 de maig de 2009, amb motiu de la concessió del premi Abel 2009 a M. L. Gromov.

hem triat uns quants resultats, amb la limitació d'haver d'exposar-los en una xerrada d'una hora. Si amb la lectura d'aquest article aconseguim despertar al lector ganes d'explorar la meravellosa obra de Gromov, ens sentirem plenament satisfets.

En els darrers anys han aparegut molts articles que fan un repàs d'algunes de les matemàtiques creades per Gromov. D'entre ells aconsellem al lector [1, 8].

2 Desigualtats sistòliques

Sigui (M, g) una varietat riemanniana. Es defineix la *sístole* de M com

$$\mathrm{sys}(M, g) := \inf\{\mathrm{long}\, \gamma \mid \gamma \subset M \text{ llaç homotòpicament no trivial}\}.$$

Aquesta terminologia va ser introduïda per Berger. La paraula *sístole* prové del grec *systellein*, que vol dir 'contraure'. És d'ús comú a la cardiologia: sístole i diàstole són la contracció de l'expansió a cada batec del cor.

El resultat següent va ser demostrat per Loewner els anys trenta. La demostració és molt bonica i senzilla, i no ens en podem estar de donar-la.

1 Teorema (Loewner) *Sigui (T, g) un tor amb una mètrica g qualsevol. Se satisfà:*

$$\grave{\mathrm{A}}\mathrm{rea}(T, g) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \mathrm{sys}(T, g)^2.$$

Prova Si g és una mètrica plana, podem identificar $(T, g) = \mathbb{R}^2/\Lambda$, on $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ és un reticle. Aleshores

$$\mathrm{sys}(T, g) = \inf_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} |\lambda|.$$

Sigui $\lambda \in \Lambda$ un vector tal que $|\lambda| = \mathrm{sys}(T, g)$, i sigui $r \subset \mathbb{R}^2$ la recta generada per λ. Sigui $r' \neq 0$ una recta paral·lela a r que contingui elements de Λ i que estigui a la mínima distància possible de r. Es comprova fàcilment que $d(r, r') \geq |\lambda|\sqrt{3}/2$, i que Λ admet com a domini fonamental un paral·lelogram P amb costats de longitud $|\lambda|$ a r i r'. Com que

$$\grave{\mathrm{A}}\mathrm{rea}(T, g) = \grave{\mathrm{A}}\mathrm{rea}(P) \geq |\lambda|^2\sqrt{3}/2,$$

la desigualtat queda demostrada. Pel cas general, introduïm aquesta notació: $\{\gamma_t\}$ és la família de llaços a $\mathbb{R}/\Lambda$ donats per la projecció de rectes del pla paral·leles al vector de longitud mínima λ.

Suposem ara que g és una mètrica arbitrària a T. Per la classificació de superfícies de Riemann de gènere 1, sabem que g és conformement equivalent a una mètrica plana:

$$g = fg_0, \qquad f : T \to \mathbb{R}, \qquad g_0 \text{ mètrica plana a } T.$$

Podem suposar sense perdre generalitat que

$$\int_T f\,dg_0 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Àrea}(T,g) = \text{Àrea}(T,g_0). \tag{1}$$

Sigui $\gamma_\tau \subset T$ una corba de les definides abans, que satisfaci

$$\int_{\gamma_\tau} f\,dg_0 = \inf_t \left\{ \int_{\gamma_t} f\,dg_0 \right\}.$$

Llavors (1) implica que

$$\int_{\gamma_\tau} f\,dg_0 \leq \int_{\gamma_\tau} 1\,dg_0 = \text{long}_{g_0}(\gamma_\tau). \tag{2}$$

Usant Cauchy–Schwartz deduïm:

$$\text{long}_g(\gamma_\tau)^2 = \left(\int_{\gamma_\tau} \sqrt{f}\,dg_0 \right)^2 \leq \left(\int_{\gamma_\tau} f\,dg_0 \right) \left(\int_{\gamma_\tau} 1\,dg_0 \right) \leq (\text{long}_{g_0}(\gamma_\tau))^2.$$

Per tant,

$$\text{sys}(T,g) \leq \text{sys}(T,g_0).$$

Combinant-ho amb (1) deduïm la desigualtat del cas pla. □

Els anys seixanta, Accola i Blatter van estendre el teorema de Loewner a gènere arbitrari:

2 Teorema (Accola, Blatter) *Per a tot $h \geq 1$ existeix una constant C_h tal que si (Σ, g) és una superfície de gènere h es té*

$$\text{Àrea}(\Sigma, g) \geq C_h \cdot \text{sys}(\Sigma, g)^2.$$

Però la constant obtinguda per Accola i Blatter satisfà $C_h \to 0$, en contra del que hom esperaria (al cap i a la fi, una superfície de gènere h s'obté enganxant h còpies del tor). Gromov va millorar substancialment el resultat d'Accola i Blatter, demostrant el teorema següent (vegeu [6, 9]).

3 Teorema (Gromov) *Per a tot $h \geq 1$ existeix una constant C'_h tal que si (Σ, g) és una superfície de gènere h es té*

$$\text{Àrea}(\Sigma, g) \geq C'_h \cdot \text{sys}(\Sigma, g)^2.$$

A més a més,

$$C'_h \geq \frac{h}{4\log^2 h}(1 + o(1)).$$

Buser i Sarnak [2] van demostrar que l'ordre de magnitud de C'_h no es pot millorar.

Gromov va estendre el resultat a dimensió arbitrària [6]:

4 TEOREMA (GROMOV) *Si (M, g) és una varietat tancada i esfèrica de dimensió n, es satisfà*
$$\mathrm{Vol}(M, g) \geq C_n \,\mathrm{sys}(M, g)^n,$$
on C_n només depèn de n.

Per a demostrar el teorema, Gromov usa l'aplicació

$$\begin{array}{rcl} \iota : M & \longrightarrow & L^\infty(M) \\ p & \mapsto & d(p, \cdot), \end{array}$$

on $d : M \times M \to \mathbb{R}$ és la funció distància entre punts induïda per la mètrica riemanniana. La desigualtat triangular implica que ι és una isometria. Llavors Gromov defineix

$$\mathrm{FillRad}(M, g) = \inf_\epsilon \{\epsilon \mid \iota_*[M] \text{ s'anul·la a } H_*(\iota(M)^\epsilon; \mathbb{R})\},$$

on
$$\iota(M)^\epsilon = \{f \in L^\infty(M) \mid d_{L^\infty(M)}(f, \iota(M)) < \epsilon\}.$$

Aquest invariant sembla encara més difícil de calcular que la sístole. Però Gromov demostra:

- $\mathrm{sys}(M, g) \leq 6\,\mathrm{FillRad}(M, g)$,
- $\mathrm{Vol}(M, g) \geq C_n \,\mathrm{FillRad}(M, g)^n$.

La segona desigualtat és la més complicada. Gromov la dedueix generalitzant arguments usats per Federer i Fleming per a demostrar certes desigualtats isoperimètriques.

Per acabar, observem que la hipòtesi d'esfericitat al teorema 4 no es pot eliminar. Si considerem la varietat $M = S^1 \times S^2$ amb la mètrica $g_1 \times g_2$, on g_1 és una mètrica a S^1 de longitud 1 i g_2 és la mètrica rodona a S^2 reescalada a volum $\lambda > 0$, quan fem $\lambda \to 0$ la desigualtat sistòlica no se satisfà per cap constant independent de λ.

3 Grups de creixement polinomial

Sigui G un grup generat per $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\} \subset G$. Tot element $g \in G$ es pot escriure combinant elements de γ en una paraula

$$g = \gamma_{i_1}^{p_1} \gamma_{i_2}^{p_2} \dots \gamma_{i_r}^{p_r}.$$

Anomenem la suma $|p_1| + \cdots + |p_r|$ la *longitud* de la paraula. Definim

$$\|g\|_\gamma = \inf\{\text{longitud de les paraules que representen } g\}.$$

Si $\gamma' = \{\gamma'_1, \dots, \gamma'_l\}$ és un altre conjunt de generadors, existeix una constant $C > 0$ tal que per a tot $g \in G$ es té

$$C^{-1}\|g\|_{\gamma'} \leq \|g\|_\gamma \leq C\|g\|_{\gamma'}. \tag{3}$$

Per a tot $r \geq 1$ sigui
$$B_r(G) = \{g \in G \mid \|g\|_\gamma \leq r\}.$$
Es diu que G té *creixement polinomial* si existeixen nombres positius C, d tals que per a tot $r \geq 1$ es té
$$\sharp B_r(G) \leq Cr^d.$$
Es diu que G té *creixement exponencial* si existeix una constant $C > 1$ tal que
$$\sharp B_r(G) \geq C^r$$
per a tot $r \geq$. Les cotes (3) demostren que aquestes nocions són independents del conjunt de generadors triats. Aquestes nocions també són estables per pas a subgrups d'índex finit.

Intuïtivament, que un grup G tingui creixement polinomial diu que hi ha moltes relacions entre els seus elements. Per exemple: els grups nilpotents (en particular, els abelians) tenen creixement polinomial.

Recordem alguns conceptes bàsics de teoria de grups. Sigui G un grup qualsevol. Es defineix la *sèrie central descendent* de G recursivament d'aquesta manera:
$$G_0 = G, \qquad G_{j+1} = [G, G_j] \quad j \geq 0.$$
Es diu que G és *nilpotent* si existeix un j tal que $G_j = \{1\}$. Es defineix la *sèrie derivada* de G recursivament d'aquesta manera:
$$D_0 = G, \qquad D_{j+1} = [D_j, D_j] \quad j \geq 0.$$
Es diu que G és *resoluble* si existeix un j tal que $D_j = \{1\}$. Es tenen aquestes implicacions:
$$\text{abelià} \quad \Longrightarrow \quad \text{nilpotent} \quad \Longrightarrow \quad \text{resoluble}.$$
Finalment, es diu que G és *virtualment nilpotent* (resp. resoluble) si G té un subgrup nilpotent (resp. resoluble) d'índex finit.

Milnor [13] i Wolf [15] van demostrar que un grup resoluble G té creixement polinomial si i només si és nilpotent, i en cas contrari té creixement exponencial. Tits [14] va demostrar que per a tot subgrup finitament generat G d'un grup de Lie connex es té l'alternativa següent: o bé G conté un subgrup lliure generat per dos elements, o bé G és virtualment resoluble. Combinant aquests resultats deduïm:

5 TEOREMA *Sigui G un subgrup finitament generat d'un grup de Lie connex. Si G té creixement polinomial, aleshores G és virtualment nilpotent.*

A l'article [5] Gromov demostra el teorema següent.

6 TEOREMA (GROMOV) *Qualsevol grup G amb creixement polinomial és virtualment nilpotent.*

Gromov aconsegueix reduir el cas general al de subgrups de grups de Lie connexos usant un argument màgic.

- Associa al grup G un espai mètric $X = (G, d)$, on $d(g_1, g_2) = \|g_1 g_2^{-1}\|_\gamma$ (perquè d sigui una distància cal suposar que γ conté l'invers de qualsevol dels seus elements).
- Sigui $\lambda \in (0, \infty)$ i $X_\lambda = (G, \lambda d)$. Llavors Gromov demostra que existeix un espai mètric $X_0 = (X_0, d_0)$ tal que
  1. $X_{\lambda_j} \to X_0$ en el sentit de Gromov–Hausdorff, on λ_j és una successió adequada de nombres reals positius que convergeixen a 0,
  2. $\mathrm{Isom}(X_0)$ actua transitivament a X_0,
  3. X_0 és compacte, connex, localment connex i té dimensió de Hausdorff finita.
- Aplicant un corol·lari de la solució de Gleason–Montgomery–Zippin del cinquè problema de Hilbert, Gromov dedueix que $\mathrm{Isom}(X_0)$ és un grup de Lie amb un nombre finit de components connexos.
- Finalment, usant propietats bàsiques de la convergència de Gromov–Hausdorff, Gromov construeix morfismes $G \to \mathrm{Isom}(X_0)$. Analitzant curosament la possible imatge d'aquest morfisme i usant inducció sobre el grau de creixement polinomial, en dedueix el teorema.

La idea d'associar a un grup G un espai mètric tal com hem especificat apareix en una altra de les contribucions revolucionàries de Gromov a les matemàtiques: la teoria dels grups hiperbòlics (aquells que donen lloc a un espai mètric que, en un sentit adequat, té curvatura negativa). Vegeu-ne una introducció a [4]. La noció de convergència de Gromov–Hausdorff també ha tingut un paper crucial, notablement a la geometria riemanniana. Per exemple, a la recent demostració de la conjectura de Poincaré deguda a Perelman l'estudi de les possibles degeneracions d'una mètrica sota el flux de Ricci quan hi ha explosió en temps finit s'aborda estudiant el límit de les mètriques en el sentit de Gromov–Hausdorff quan el temps s'apropa al temps d'explosió. Per acabar aquests comentaris, fem observar que l'article [5] és el primer que fa servir com a eina la solució del cinquè problema de Hilbert obtinguda per Gleason, Montgomery i Zippin.

Recentment Kleiner [10] ha trobat una nova demostració del resultat de Gromov.

4 Geometria simplèctica

Per a una introducció excel·lent a la geometria simplèctica el lector pot consultar [12]. Com hem fet amb els altres temes, aquí ens limitarem a donar les definicions imprescindibles per a poder enunciar els resultats. Sigui M una varietat diferencial. Una forma simplèctica a M és una 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ que satisfà dues propietats:

- ω és no degenerada: per a tot $p \in M$ i $u \in T_pM$ existeix algun $v \in T_pM$ tal que $\omega(u, v) \neq 0$,
- ω és tancada: $d\omega = 0$.

Una varietat simplèctica és un parell (M, ω), on M és una varietat diferencial i ω és una forma simplèctica a M.

EXEMPLE $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st} = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dx_{j+n})$ és una varietat simplèctica.

Dues varietats simplèctiques (M, ω) i (N, η) són simplectomorfes si existeix un difeomorfisme $f : M \to N$ tal que $f^*\eta = \omega$ (llavors es diu que f és un simplectomorfisme).

7 LEMA (DARBOUX) *Sigui* (M, ω) *una varietat simplèctica qualsevol. Llavors tot punt* $p \in M$ *té un entorn simplectomorf a un obert de* $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$.

El lema de Darboux ens diu que no hi ha invariants locals de varietats simplèctiques, més enllà de la dimensió. Això fa pensar que la geometria simplèctica és molt flexible. Els dos resultats següents reforcen aquesta idea.

8 LEMA *Sigui* (M, ω) *una varietat simplèctica connexa, sigui* k *un natural qualsevol, i siguin* $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ *dos conjunts qualssevol de punts diferents de* M. *Llavors existeix un simplectomorfisme* $f : M \to M$ *tal que* $f(a_j) = b_j$ *per a tot* j.

El segon resultat és un exemple de l'anomenat h-principi (que es pronuncia usualment *hac-principi*), demostrat per Gromov a la seva tesi doctoral (vegeu el teorema 10.3.2 de [3]).

9 TEOREMA (GROMOV) *Sigui* M *una varietat oberta. Considerem els subconjunts següents de* $\Omega^2(M)$:

$$\begin{aligned} \Omega_{nodeg} &= \{\omega \in \Omega^2(M) \mid \omega \text{ és no degenerada } \}, \\ \Omega_{symp} &= \{\omega \in \Omega_{nodeg} \mid d\omega = 0\}. \end{aligned}$$

Llavors la inclusió $\Omega_{symp} \hookrightarrow \Omega_{nodeg}$ *és una equivalència homotòpica.*

Es diu que l'h-principi s'aplica a una estructura geomètrica definida combinant condicions topològiques (o, més en general, condicions puntuals) amb condicions diferencials (per exemple, que se satisfaci una certa EDP, o una desigualtat en derivades parcials), si la inclusió de l'espai d'estructures que satisfan les condicions topològiques i diferencials dins l'espai de les estructures que satisfan les condicions topològiques és una equivalència homotòpica. En el cas de les formes simplèctiques la condició topològica és la no degeneració, mentre que la condició diferencial és demanar que la forma sigui tancada. Gromov va demostrar que se satisfà l'h-principi en moltes situacions geomètriques diferents: el problema d'existència de formes simplèctiques, el d'immersions (això havia estat demostrat prèviament per Hirsch, que va estendre treballs de Smale), el d'*embeddings* isomètrics (l'existència dels quals està garantida pels resultats de Nash i Kuiper), i molts d'altres. El llibre [3] dóna una excel·lent introducció a aquestes qüestions.

El resultat següent (teorema de *nonsqueezing*) va marcar l'inici d'una autèntica revolució en el camp de la geometria simplèctica (vegeu [7] o teorema 9.3.1 a [11]).

10 Teorema (Gromov) *Siguin $r, R > 0$ nombres reals, n un nombre natural, i siguin*

$$M_r = \{x \in \mathbb{R}^{2n+2} \mid |x| < r\},$$
$$N_R = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2n} \mid |y| < R\}.$$

Prenem a M_r, N_R les formes simplèctiques ω_M, ω_N que resulten de restringir la forma ω_{st} a $\mathbb{R}^{2n+2}$ via les inclusions naturals $M_r, N_R \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$. Suposem que existeix un embedding *simplèctic $f : M_r \to N_R$ (és a dir, $f^*\omega_N = \omega_M$). Aleshores*

$$r \le R.$$

Aquest teorema permet demostrar el resultat següent (vegeu el capítol 12 de [12]):

11 Teorema (Eliashberg, Hofer) *Sigui (M, ω) una varietat simplèctica compacta, i sigui $f : M \to M$ un difeomorfisme. Suposem que existeixen simplectomorfismes $f_j : M \to M$ que convergeixen a f en norma C^0. Aleshores f és un simplectomorfisme.*

En altres paraules, el grup de simplectomorfismes de (M, ω), vist com un subgrup del grup de difeomorfismes, és tancat en la topologia C^0 (observem que si fem servir la topologia C^1 en lloc de la C^0 llavors el resultat és obvi). Amb aquest resultat Gromov va demostrar que la geometria simplèctica, tot i ser molt flexible, es comporta de manera rígida en algunes situacions.

La demostració del teorema de *nonsqueezing* segueix aquests passos:

- Primerament es defineix una *estructura quasicomplexa* compatible en una varietat simplèctica (M, ω) com un endomorfisme $J \in C^\infty(M; TM)$ tal que $J^2 = -\mathrm{Id}_{TM}$ i tal que $\omega(\cdot, J\cdot)$ és una mètrica riemanniana a M. L'estructura quasicomplexa estàndard a $\mathbb{R}^{2k}$, definida com

$$J_{st}\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_{k+j}}, \qquad J_{st}\frac{\partial}{\partial x_{j+k}} = -\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad 1 \le j \le k,$$

  és compatible amb l'estructura simplèctica estàndard ω_{st}.
- Siguin M_r, N_R com a l'enunciat del teorema, i sigui $f : M_r \to N_R$ un *embedding*. Sigui J l'estructura quasicomplexa estàndard a M_r, i sigui J_1 una estructura quasicomplexa a N_R que coincideixi amb f_*J_{st} fora d'un entorn molt petit de $\partial f(M_r)$. Gromov demostra que existeix disc J_1 holomorf propi a N_R, és a dir, una aplicació pròpia

$$s : D \to M_R$$

tal que

$$\frac{\partial s}{\partial y} = J_1(s)\frac{\partial s}{\partial x}$$

(aquí D denota una bola oberta de radi 1 dins $\mathbb{R}^2$ i (x, y) són les coordenades canòniques a $\mathbb{R}^2$). A més, podem suposar que l'aplicació s satisfà aquestes dues propietats:

1. $s_*[D]$ és un generador de $H_2(M_R, \partial M_R)$,
2. la imatge de s conté la imatge del centre de M_r: $f(0) \in s(D)$.

- El teorema de Stokes i el fet que $s_*[D]$ sigui un generador impliquen que

$$\int_D s^*\omega_N = \pi R^2.$$

- Finalment, si $D' = s^{-1}(f(M_r))$, llavors

$$s' : f^{-1} \circ s : D' \to M_R$$

és una aplicació holomorfa pròpia que conté el centre de la bola M_r a la seva imatge. En aquesta situació es pot demostrar la desigualtat següent (que porta el nom de *propietat de monotonicitat* de les aplicacions holomorfes):

$$\int_{D'} (s')^*\omega_M \geq \pi r^2.$$

- Combinant les dues integrals, i tenint en compte que $f^*\omega_N$ és positiu a tot arreu, obtenim $r \geq R$.

El pas més enginyós de la demostració és que existeix el disc $s : D \to N_R$. Gromov ho aconsegueix usant el mètode de continuïtat, prenent un camí d'estructures quasicomplexes compatibles J_t, on J_0 és J_{st} restringida a N_R (per la qual l'existència de discos és òbvia). La part més difícil és la demostració que el conjunt de t per al qual existeix un disc és tancat. Això es dedueix d'un estudi detallat de les possibles degeneracions de discos holomorfs.

Referències

[1] Berger, M., «Encounter with a geometer I i II». *Notices Amer. Math. Soc.*, 47 (2000), 183–194, 326–340.

[2] Buser, P.; Sarnak, P. «On the period matrix of a Riemann surface of large genus». Amb un apèndix de J. H. Conway i N. J. A. Sloane. *Invent. Math.*, 117 (1994), 27–56.

[3] Eliashberg, Y.; Mishachev, N. *Introduction to the h-principle*. Providence: American Mathematical Society, 2002. (Graduate Studies in Mathematics; 48)

[4] Ghys, É.; Harpe, P. de la *Espaces métriques hyperboliques, sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. (Berna, 1988), 27–45. Boston: Birkhäuser, 1990. (Progr. Math.; 83)

[5] Gromov, M. «Groups of polynomial growth and expanding maps». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 53 (1981), 53–73.

[6] Gromov, M. «Filling Riemannian manifolds». *J. Differential Geom.*, 18 (1983), núm. 1, 1–147.

[7] Gromov, M. «Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds». *Invent. Math.*, 82 (1985), núm. 2, 307–347.

[8] Guijarro, L.; Muñoz, V.; Gromov, M. «Un gran geómetra que no fue Fields». Apareixerà a la *Gaceta de la RSME*.

[9] Katz, M. G. *Systolic geometry and topology*. Amb un apèndix de Jake P. Solomon. Providence: American Mathematical Society, 2007. (Mathematical Surveys and Monographs; 137)

[10] Kleiner, B. «A new proof of Gromov's theorem on groups of polynomial growth». *preprint* arXiv:0710.4593.

[11] McDuff, D.; Salamon, D. *J-holomorphic curves and symplectic topology*. Providence: American Mathematical Society, 2004. (American Mathematical Society Colloquium Publications; 52)

[12] McDuff, D.; Salamon, D. *Introduction to symplectic topology*. 2a ed. Oxford: Oxford University Press, 1998. (Oxford Mathematical Monographs)

[13] Milnor, J. «A note on curvature and fundamental group». *J. Differential Geom.*, 2 (1968), 1–7.

[14] Tits, J. «Free subgroups in linear groups». *J. Algebra*, 20 (1972), 250–270.

[15] Wolf, J. A. «Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemanniann manifolds». *J. Differential Geom.*, 2 (1968), 421–446.

Departament d'Àlgebra i Geometria
Facultat de Matemàtiques Universitat de Barcelona
Gran Via de les Corts Catalanes, 585
08007 Barcelona
ignasi.mundet@ub.edu